Forma Heurística de la Ecuación de Dirac

Omar Corona Tejeda

260820

1 Caso $m = 0$

Es bien sabido que en el caso de una partícula relativista ψ con masa identicamente cero i.e. $m = 0$ la ecuación de Klein-Gordon con constantes $c = 1$ y $\hbar = 1$[1] Toma la forma:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2)\psi \equiv 0 \tag{1}$$

o en una forma más corta:

$$\boxed{\Box\psi \equiv 0} \tag{2}$$

donde el operador $\Box$ recibe el nombre de *operador de D'Alambert*.

La idea de Dirac es introducir un *espacio de descomposición* para el operador $\Box$ de tal forma que pueda ser expresado como un *operador al cuadrado* i.e.

$$\Box = algo^2 \tag{3}$$

Para esto la *forma natural* es introducir coeficientes γ^μ de tal forma que:

$$\Box = (\gamma^0\partial_o + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2 + \gamma^3\partial_3)^2 \tag{4}$$

donde $\partial_0 \equiv \partial_t$, $\partial_1 \equiv \partial_x$, $\partial_2 \equiv \partial_y$ y $\partial_3 \equiv \partial_z$ De esta forma al desarrollar el término al cuadrado obtenemos las relaciones que deben de cumplir los coeficientes γ para preservar la identidad i.e.

$$(\gamma^0)^2 \equiv 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 \equiv -1 \tag{5}$$

[1] La constante c es la velicidad de la luz en el vacio y $\hbar$ la constante de Planck reducida

y para $\mu \neq \nu$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \equiv 0 \tag{6}$$

que en forma más compacta puede ser expresada como:

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}} \tag{7}$$

donde $\eta^{\mu\nu}$ es la métrica plana de Minkowski.

Las relaciones anteriores de los coeficientes γ definen la estructura de un **álgebra de Clifford**

De esta forma tenemos que

$$\Box = (\gamma^\mu \partial_\mu)^2 \tag{8}$$

Con lo que

$$\Box \psi = (\gamma^\mu \partial_\mu)^2 \psi \equiv 0 \tag{9}$$

es decir

$$\boxed{\gamma^\mu \partial_\mu \psi \equiv 0} \tag{10}$$

que representa la **ecuación de Dirac para partículas sin masa.**

2 Caso $m \neq 0$

En el caso de que la masa $m \neq 0$ tenemos que la ecuación de klein-Gordon toma la forma

$$\boxed{(\Box - m^2)\psi \equiv 0} \tag{11}$$

análogamente al caso de partículas sin masa podemos pensar en *factorizar* el operador de Klein-Gordon. De esta forma tenemos:

$$\Box - m^2 = (algo)^2 = (\gamma^\mu \partial_\mu + im)^2 \equiv 0 \tag{12}$$

es decir

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + im)\psi \equiv 0 \tag{13}$$

Multiplicando por i toda la ecuación anterior obtenemnos su forma más conocida:

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \equiv 0} \tag{14}$$

que representa la **ecuación de Dirac para particulas con masa.**